

Dwukołowy robot balansujący

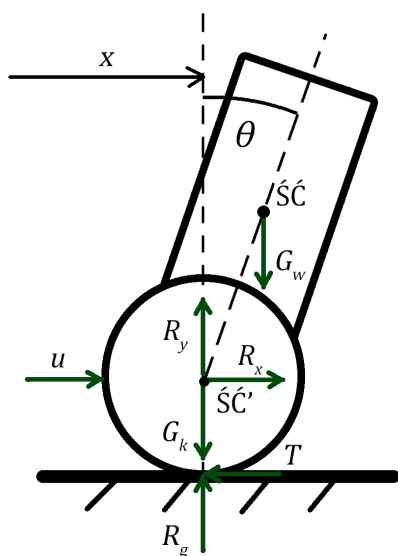
Julian Prolejko

25 czerwca 2018

Spis treści

1	Wstęp teoretyczny	1
2	Sterowanie za pomocą sprzężenia zwrotnego od zmiennych stanu	3
3	Projekt robota	7
4	Prototyp	8
5	Wnioski	8

1 Wstęp teoretyczny



Rysunek 1: Schemat kinematyczny robota

G_w, G_k - siły ciężkości odpowiednio członu wahliwego oraz kół robota
 R_x, R_y - siły pochodzące od kół działające na człon wahliwy
 R_g - siła, z którą podłoże działa na robota
 T - siła tarcia pomiędzy kołami a podłożem
 u - siła wymuszająca
 m, M - masy odpowiednio członu wahliwego oraz układu kół
 J - moment bezwładności względem środka ciężkości członu wahliwego
 θ - kąt odchylenia osi robota od osi pionowej
 x - położenie podstawy w osi zgodnej z ustawieniem robota
 $\dot{\theta}$ - prędkość kątowa
 \dot{x} - prędkość podstawy
 l - odległość środka ciężkości członu wahliwego od osi obrotu

Założeniem modelu matematycznego jest pominięcie siły odśrodkowej występującej w członie wahliwym ze względu na pomijalne wartości drugiej potęgi prędkości kątowej \ddot{x} .

Korzystając z II zasady dynamiki Newtona, możemy rozpisać równania ruchu dla układu dwóch kół:

$$\begin{cases} u - R_x + T = M\ddot{x} \\ R_g - G_k - R_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Analogicznie, możemy rozpisać równania ruchu dla członu wahliwego:

$$\begin{cases} R_x = m\ddot{x}_w \\ R_y - G_w = m\ddot{y}_w \end{cases} \quad (2)$$

Wprowadzając dodatkowe geometryczne zależności otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_w = x + l \sin \theta \\ y_w = l \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

Przekształcając odpowiednio układ równań (2) oraz korzystając z zależności $G_w = mg$ otrzymujemy wzory pozwalające wyrugować siły R_x i R_y z równań ruchu:

$$\begin{cases} R_x = m \left(\ddot{x} - l (\dot{\theta})^2 \sin \theta + l\ddot{\theta} \cos \theta \right) \\ R_y = mg + ml \left(-\ddot{\theta} \sin \theta - (\dot{\theta})^2 \cos \theta \right) \end{cases} \quad (4)$$

Wprowadźmy dodatkowo równanie Eulera dla członu wahliwego wokół środka ciężkości, wiążące przyspieszenie kątowe członu z działającymi na niego momentami:

$$J\ddot{\theta} = R_y l \sin \theta + R_x l \cos \theta \quad (5)$$

Za pomocą układu równań (4) możemy wyrugować z równania niewiadome siły reakcji R_x i R_y :

$$J\ddot{\theta} = \left[mg + ml \left(-\ddot{\theta} \sin \theta - (\dot{\theta})^2 \cos \theta \right) \right] l \sin \theta + \left[m \left(\ddot{x} - l (\dot{\theta})^2 \sin \theta + l\ddot{\theta} \cos \theta \right) \right] l \cos \theta \quad (6)$$

Po uproszczeniu równania (6) możemy uzyskać pierwsze z potrzebnych równań do sformułowania równań stanu układu:

$$(J + ml^2) \ddot{\theta} = ml (g \sin \theta + \ddot{x} \cos \theta) \quad (7)$$

Wracając do równania pierwszego równania z układu równań (1) i podstawiając do niego równania (4) oraz korzystając z zależności $T = -b\dot{x}$ otrzymujemy:

$$m\ddot{x} - ml \sin \theta (\dot{\theta})^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} + b\dot{x} = u - M\ddot{x} \quad (8)$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy drugie równanie, które wraz z równaniem (7) tworzy komplet równań opisujących ruch opisywanego układu:

$$\begin{cases} (m + M) \ddot{x} = ml \left(\sin \theta (\dot{\theta})^2 - \cos \theta \ddot{\theta} \right) - b\dot{x} + u \\ (J + ml^2) \ddot{\theta} = ml (g \sin \theta - \ddot{x} \cos \theta) \end{cases} \quad (9)$$

Powyższy układ równań jest nieliniowy, zatem konieczna jest linearyzacja modelu wokół punktu równowagi tj. punktu $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$. Z tego powodu wszystkie człony $\cos \theta$ przybliżamy wartością 1, funkcję $\sin \theta$ - wartością kąta θ oraz przyjmujemy, że $(\dot{\theta})^2 \approx 0$. Układ równań po wprowadzeniu powyższych założeń ma postać:

$$\begin{cases} (m + M) \ddot{x} = -ml\ddot{\theta} - b\dot{x} + u \\ (J + ml^2) \ddot{\theta} = ml (g\theta - \ddot{x}) \end{cases} \quad (10)$$

Układ równań (10) posiada równania różniczkowe liniowe sprzężone ze sobą, zatem konieczne jest ich rozprzężenie. Wyznaczamy człon \ddot{x} z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego:

$$\ddot{x} = \frac{u - ml\ddot{\theta} - b\dot{x}}{m + M} \quad (11)$$

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} = mgl\theta - \frac{ml(u - ml\ddot{\theta} - b\dot{x})}{m + M} \quad (12)$$

$$(J(m + M) + M^2l^2)\ddot{\theta} = mgl\theta(m + M) - mlu + mlb\dot{x} \quad (13)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl\theta(m + M) + mlb\dot{x} - mlu}{J(m + M) + M^2l^2} \quad (14)$$

Korzystając z równania 14 podstawiamy wartość $\ddot{\theta}$ do równania 11:

$$\ddot{x} = \frac{u - ml \frac{mgl\theta(m+M) - mlu + mlb\dot{x}}{J(m+M) + M^2l^2} - b\dot{x}}{m + M} \quad (15)$$

$$\ddot{x} = \frac{-m^2gl^2\theta(m + M) + (-b\dot{x} + u)(J(m + M) + l^2(m^2 + M^2))}{(m + M)(J(m + M) + M^2l^2)} \quad (16)$$

Równanie (16) wraz z równaniem (14) stanowią komplet równań opisujących ruch projektowanego przeze mnie robota. Po wprowadzeniu zestawu czterech zmiennych, układ może być reprezentowany przez równania zmiennych stanu w postaci macierzowej. Wprowadzamy zatem wektor zmiennych $\mathbf{x} = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$, wymuszenie w postaci wektora jednoelementowego $\mathbf{u} = [u]$ oraz wektor sygnału wyjściowego w postaci odchylenia robota oraz jego położenia, a zatem $\mathbf{y} = [x, \theta]^T$. Równania zmiennych stanu będą miały postać:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (17)$$

gdzie macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} są odpowiednio postaci:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m^2gl^2}{J(m+M) + M^2l^2} & \frac{-b(J(m+M) + l^2(m^2 + M^2))}{(m+M)(J(m+M) + M^2l^2)} & 0 \\ 0 & \frac{mgl(m+M)}{J(m+M) + M^2l^2} & \frac{mlb}{J(m+M) + M^2l^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J(m+M) + l^2(m^2 + M^2)}{(m+M)(J(m+M) + M^2l^2)} \\ \frac{-ml}{J(m+M) + M^2l^2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

2 Sterowanie za pomocą sprzężenia zwrotnego od zmiennych stanu

Podstawmy do równań założenia parametrów robota, czyli:

$$b = 0.1 \frac{kg}{s}$$

$$\begin{aligned}
m &= 3kg, M = 0.3kg \\
J &= 0.5kgm^2 \\
l &= 0.1m
\end{aligned}$$

Dostajemy macierze stanu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5348 & -0.0320 & 0 \\ 0 & 5.8828 & 0.0182 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3196 \\ -0.1817 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Sprawdźmy stabilność układu związanego z robotem. W tym celu zbadajmy wartości własne s macierzy \mathbf{A} , korzystając z zależności:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (24)$$

Dostajemy wyniki: $s_1 = 0, s_2 = 2.4246, s_3 = -2.4263, s_4 = -0.0303$.

Rozwiązanie powyższego równania prowadzi do wniosków, że nie każdy z biegunów transmitancji układu jest po lewej stronie osi urojonej na płaszczyźnie zespolonej. Z tego powodu układ możemy uznać za niestabilny, a zatem w celu jego poprawnego działania, konieczne jest zastosowanie odpowiedniego sterowania. W moim projekcie zdecydowałem się na sterowanie z wykorzystaniem sprzężenia zwrotnego od zmiennych stanu. Pierwszym krokiem w celu jego realizacji jest sprawdzenie, czy układ jest sterowalny.

Wprowadźmy zatem macierz Kalmana o rozmiarze 4×4 :

$$\mathbf{\Omega} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^3\mathbf{B}] \quad (25)$$

Zgodnie z kryterium Kalmana sterowalność układu zależy od rzędu macierzy $\mathbf{\Omega}$. Sprawdźmy zatem wyznacznik macierzy:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0.3196 & -0.0102 & 0.0975 \\ 0 & -0.1817 & 0.0058 & -1.0692 \\ 0.3196 & -0.0102 & 0.0975 & -0.0062 \\ -0.1817 & 0.0058 & -1.0692 & 0.0359 \end{bmatrix} = -0.1049 \neq 0 \quad (26)$$

Zatem macierz $\mathbf{\Omega}$ jest pełnego rzędu i opisywany układ jest układem sterowalnym.

Wprowadzenie sprzężenia zwrotnego poprzez odpowiednie sterowanie wartością wymuszenia $u = -\mathbf{K}x$ zmienia równania stanu do postaci:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (27)$$

gdzie: $\mathbf{K} = [k_1, k_2, k_3, k_4]$

W celu otrzymania wartości komórek macierzy wzmocnienia \mathbf{K} możemy posłużyć się metodą Ackermanna tj.:

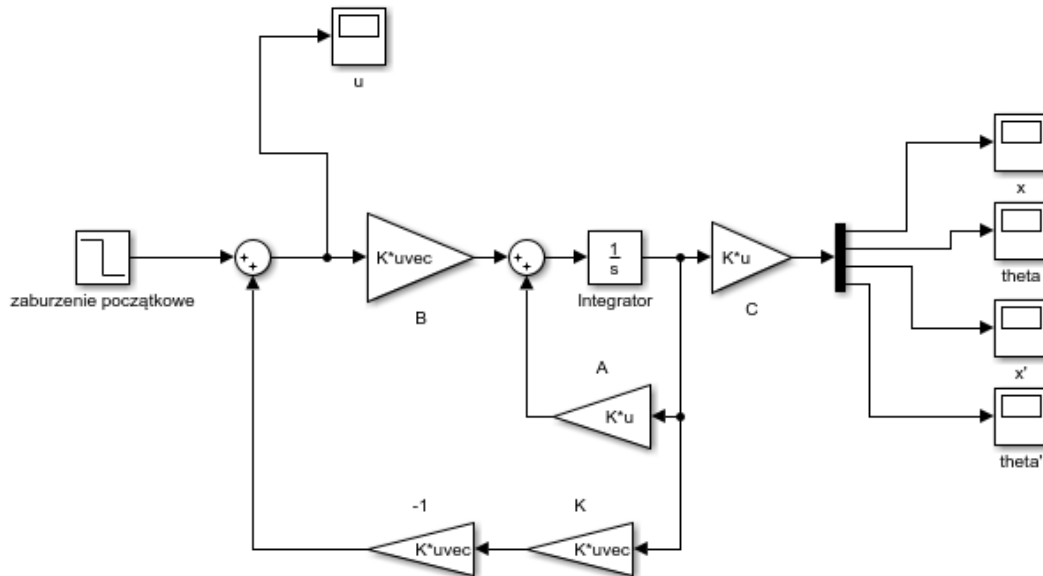
$$\mathbf{K} = [0, 0, 0, 1] \mathbf{\Omega}^{-1} \varphi(\mathbf{A}) \quad (28)$$

gdzie $\varphi(\mathbf{A})$ jest podstawieniem macierzy \mathbf{A} do wyjściowego równania charakterystycznego. Policzmy zatem odwrotność macierzy $\mathbf{\Omega}$ oraz $\varphi(\mathbf{A})$:

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1000 & 0.0000 & 3.3000 & 0.3000 \\ 3.3000 & 0.3000 & -0.0179 & -0.0315 \\ -0.0179 & -0.0315 & -0.5610 & -0.9864 \\ -0.5610 & -0.9864 & -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\varphi(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) \quad (30)$$

Przyjmuję, że transmitancja wyjściowego układu powinna składać się z biegunów o charakterze zespolonym z ujemną częścią rzeczywistą. Wprowadzenie biegunów z niezerową częścią urojoną pozwala na wywołanie oscylacji w członie wahliwym, które pozwoli na szybsze ustabilizowanie układu. Przeregulowanie wywołane zbyt mocną odpowiedzią układu nie przeszkadza w działaniu robota. W celu właściwego dobrania docelowych biegunów robota, posłużyłem się środowiskiem Matlab z pakietem Simulink.



Rysunek 2: Model w postaci schematu blokowego

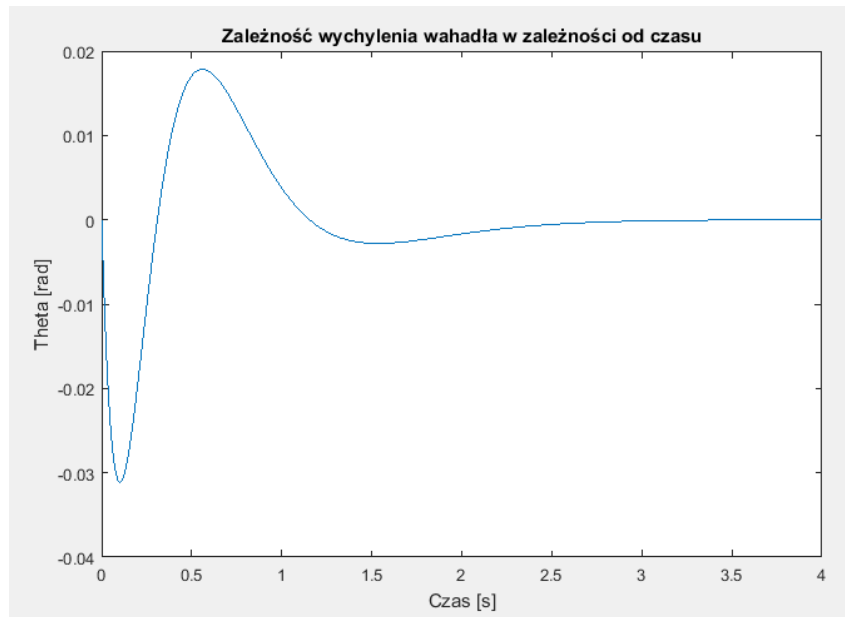
Posłużenie się symulacją ułatwiło dobór biegunów transmitancji, które w ostateczności zostały ustalone jako: $s_{1,2} = 4 \pm j0.03$, $s_{3,4} = 4.2$. Dane bieguny pozwoliły na dostatecznie szybki powrót robota do stanu równowagi po chwilowym z niej wyprowadzeniu, jednocześnie nie wymagając zbyt dużej siły napędowej. Dobór omawianych biegunów wiązał się z docelową postacią transmitancji:

$$\varphi(s) = s^4 + 16.4s^3 + 100.841s^2 + 275.528s + 282.256 \quad (31)$$

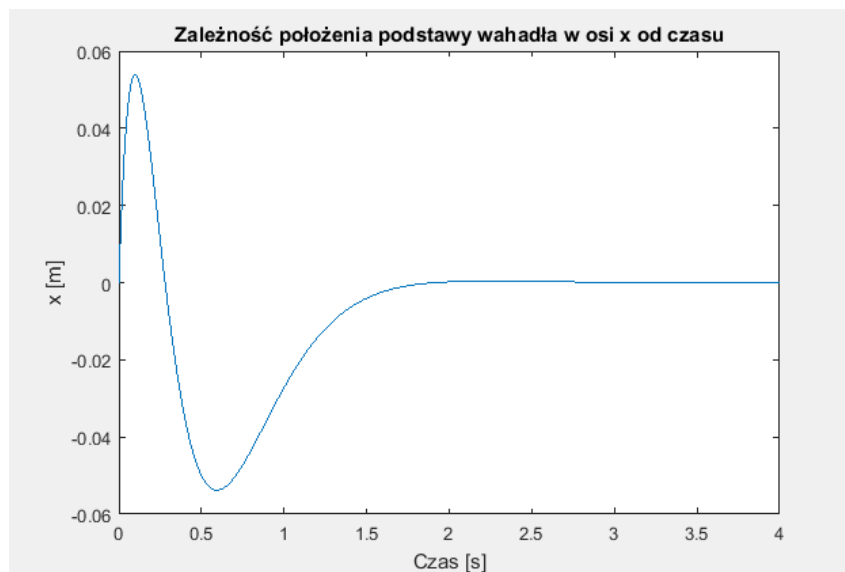
Zatem komórki macierzy sterowania będą miały wartość:

$$\mathbf{K} = [-158.3338, -865.7286, -154.6597, -362.0401] \quad (32)$$

Wykres zależności kąta θ i x po wytrąceniu z równowagi od czasu został umieszczony poniżej:



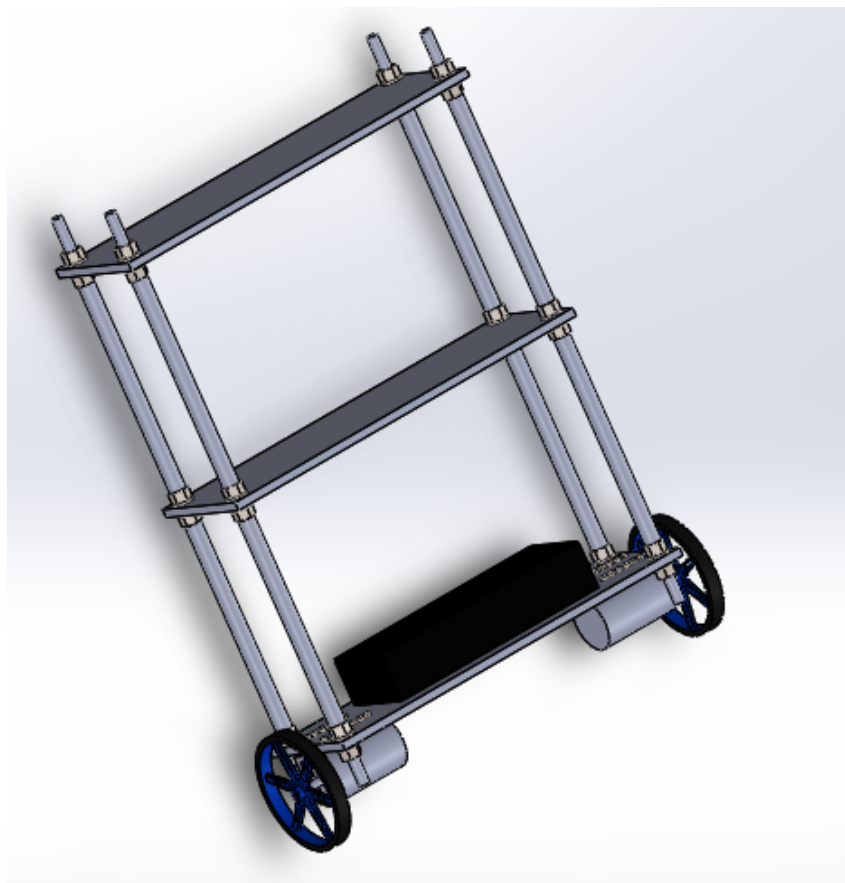
Rysunek 3: Wykres zależności kąta θ od czasu



Rysunek 4: Wykres zależności x od czasu

3 Projekt robota

Następnym etapem przy projektowaniu dwukołowego robota balansującego było stworzenie trójwymiarowego modelu wszystkich znaczących elementów mechanicznych w programie SolidWorks. Zastosowana została prosta konstrukcja, umożliwiająca umieszczenie całego potrzebnego osprzętu elektronicznego. Oprócz tego, w projekcie przewidziane zostały dodatkowe miejsca robocze. Na poniższym rysunku zostało zaprezentowane trójwymiarowe złożenie robota.

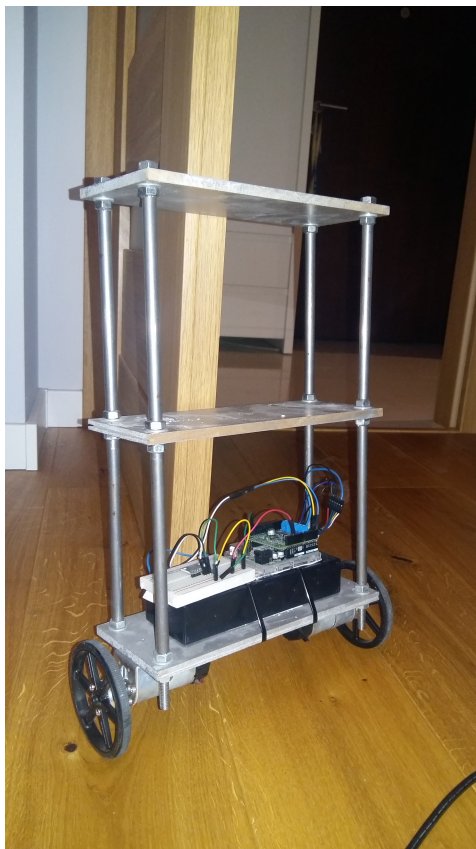


Rysunek 5: Model złożeniowy robota

Elementy odpowiadające za stopnie mocy robota składają się z akumulatora żelowego o napięciu 12V oraz pojemności 2,2Ah oraz dwóch jednostek napędowych. Każda z nich to połączenie silnika szczotkowego prądu stałego Pololu zaprojektowanego do pracy z napięciem 12V oraz przekładni 70:1. Tak skonstruowany napęd zapewnia moment siły 1,37Nm na koło oraz maksymalne obroty 150 obr./min. Takie parametry pracy spełniają warunki, potrzebne do odpowiedniego sterowania robotem. Pozostałe elementy elektroniczne składają się z mikrokontrolera Arduino UNO - odpowiadającego za gromadzenie danych z czujników oraz sterowanie napędami, jednostki IMU - żyroskopu i akcelerometru - służącej do pomiaru wychylenia i prędkości obrotowej robota, enkoderów impulsowych na napędach oraz sterownika dwukanałowego silników Pololu MC33926.

4 Prototyp

Końcowym etapem pracy było wykonanie prototypu robota. Element wahliwy robota został złożony z drewnianych desek przyciętych na wymiar. Zostały one wsparte 4 nagwintowanymi prętami i połączone wraz z użyciem tulejek dystansowych. Mocowanie układów napędowych zrealizowano za pomocą dedykowanych kątowników. Koła o średnicy 90mm połączono z wałami silników hubami mocującymi.



Rysunek 6: Prototyp

Tak skonstruowany robot został poddany testom układu sterowania. Zadanie sygnału sterującego w postaci zerowego wychylenia spowodowało niegasnące oscylacje. Robot nie przewracał się, jednakże próba stabilizacji nie przyniosła zadowalających rezultatów. Prawdopodobną przyczyną występowania takiego zjawiska było zastosowanie niskiej jakości modułów elektronicznych. Pomiary z jednostki IMU były obciążone sporym błędem, który to przekładał się dalej na błędny sygnał wyjściowy do napędów. Kolejną rzeczą, która pogarszała jakość sterowania było opóźnienie występujące pomiędzy rzeczywistą zmianą stanu robota i odpowiedzią (pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym). Te zjawiska powodowały złe dostosowanie prędkości obrotowej kół robota do aktualnego wychylenia, najczęściej powodując zbyt duże przeregulowanie.

5 Wnioski

Projekt robota został wykonany od początku z uwzględnieniem wszystkich kroków pośrednich - od modelu matematycznego, przez projekt mechaniczny, elektroniczny - aż do prototypu. Dzięki temu, możliwe było zgłębienie wszystkich tajemnic wiedzy inżynierskiej i projektowej. Części mechaniczne prototypu zostały wykonane w domowy sposób w warunkach garażowych. Jest to

przyczyną niedokładności wykonania, co jest znaczną przeszkodą przy sterowaniu robotem na podstawie wcześniej wyprowadzonego modelu matematycznego. Spowodowało to niedokładne utrzymywanie zadanego zerowego uchybu przez robota. Rozwiązaniem problemu niedokładnego sterowania z poziomu mechaniki mogłoby być zastosowanie większej precyzji przy wytwarzaniu części. W kwestii elektronicznej, zastosowanie profesjonalnych modułów o lepszych parametrach spowodowałoby poprawę w pracy robota. Dodatkowym czynnikiem, który mógłby wpłynąć pozytywnie na jakość sterowania byłaby zamiana napędów na jednostki lepszej jakości i z mniejszymi luzami w przekładniach.